Alexandre Marino
Lycée Joffre

Un Vrai-Faux sur les suites

Dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront des suites réelles.

Question 1 : soit $l \neq 0$, $|u_n| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} |l| \overset{?}{\Rightarrow} u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} l$ **réponse : NON**

En effet, il suffit de poser $u_n = (-1)^n$.

Question 2 : $|u_n| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \overset{?}{\Rightarrow} u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ **réponse : OUI**

En effet,
par définition de la limite

$$|u_n| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N\ |u_n| \leq \epsilon \Longleftrightarrow u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

Question 3 : (u_n) converge $\overset{?}{\Rightarrow}$ $(\frac{1}{u_n})$ converge **réponse : NON**

En effet,
En général la réponse est NON, mais trois cas se présentent :
<u>**1er cas :**</u> **Si (u_n) converge vers $l \neq 0$ alors $(\frac{1}{u_n})$ converge vers $\frac{1}{l}$**
<u>**2ème cas :**</u> **Si (u_n) converge vers 0 et $u_n > 0$ (resp. $u_n < 0$) alors $(\frac{1}{u_n})$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)**
<u>**3ème cas :**</u> **On peut trouver : (u_n) converge vers 0 et $(\frac{1}{u_n})$ ne converge pas.**
Poser $u_n = \frac{1}{(-1)^n n}$.

Question 4 : si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$. **réponse : NON**

En effet, en général la réponse est NON, mais deux cas se présentent :
<u>**En général :**</u> **Si (v_n) n'est pas bornée.**
poser $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n$.
<u>**Cas particuliers :**</u> **Si (v_n) est bornée.**
Dans ce cas, $u_n v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Question 5 : Si $u_n v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$. **réponse : NON**

En effet, il suffit de poser u_n tel que $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 1$ et de poser $v_n = 1 - u_n$. Nous obtenons $u_n v_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (u_n), (v_n) ne convergent pas vers 0.

Question 6 : Si $u_n + v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $v_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. **réponse : NON**

En effet, posons u_n telle que $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 2n+1$ et v_n telle que $v_{2n} = 2n$ et $v_{2n+1} = 0$, nous obtenons $u_n + v_n = n$ et ni (u_n) ni (v_n) ne convergent vers $+\infty$.

Question 7 : Si (u_n) est strictement décroissante et positive alors $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$. **rép. : NON**

En effet, poser $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Question 7bis : Si (u_n) est strict. croissante et positive alors $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. **rép. : NON**

En effet, poser $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Question 8 : Si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ et (u_n) est à termes positifs ou nuls, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. **réponse : NON**

En effet, poser u_n tel que $u_{2n} = \frac{1}{2n}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2n-1}$

Question 9 : Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $nu_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. **réponse : NON**

En effet, en général la réponse est NON, mais deux cas se présentent :
En général : poser $u_n = \frac{1}{n}$.
Cas particuliers : Si $u_n > a > 0$ à partir d'un certain rang alors $nu_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
(En particulier, si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} l > 0$.)
Dans ce cas, à partir d'un certain rang $nu_n > na$ donc $nu_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Question 10 : Si $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(u_n)^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. **réponse : NON**

En effet, posons $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, nous avons donc $(u_n)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$. Sachant que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; nous obtenons $(u_n)^n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} e$.

Question 11 : Si (u_n) est convergente alors $(\mid u_n\mid)$ est convergente. **réponse : OUI**

En effet, c'est du cours.

Question 12 : Si $u_n \leq v_n \leq w_n$, $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $w_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors (v_n) converge et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n \in [0, 1]$. **réponse : NON**

En effet, poser $u_n = 0$, $w_n = 1$ et v_n tel que $v_{2n} = 0$ et $v_{2n+1} = 1$.

Question 13 : Si (u_n) est convergente alors : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} - u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0$. **réponse : OUI**

En effet, c'est du cours.

Question 14 : Si (u_n) n'est pas majorée alors $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. **réponse : NON**

En effet, poser u_n tel que $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 0$.

Question 15 : Si $u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang. **réponse : NON**

En effet, poser u_n tel que $u_{2n} = 2n$ et $u_{2n+1} = 2n - 1$.

Question 16 : Si (u_n) n'est pas majorée alors il existe une sous-suite de (u_n) de limite $+\infty$. rép : OUI

En effet, si (u_n) n'est pas majorée alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k := \{n \in \mathbb{N}, u_n \geq k\}$ est non vide. Posons l'application ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi(k) = \min(A_k \backslash \{\phi(k-1)\})$. Par définition même de A_k, nous obtenons : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(k)} \geq k$. Ce qui implique que $(u_{\phi(k)})$ diverge vers $+\infty$.

Question 17 : il existe une suite extraite de (u_n) de limite $+\infty$ alors (u_n) n'est pas majorée. rép : OUI

En effet, il suffit de montrer que si $A \in \mathbb{R}$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \geq A$. Or, nous savons qu'il existe ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(u_{\phi(k)})$ diverge vers $+\infty$. En particulier il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{\phi(n)} \geq A$. Il suffit donc de poser $k = \phi(N)$.

Question 18 : Si $u_{n+1} - u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors (u_n) est convergente. réponse : NON

En effet,
Nous allons traiter deux cas :
<u>1er cas :</u> (u_n) diverge vers $+\infty$.
Posons $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, d'après le cours (u_n) diverge vers $+\infty$ et de plus $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.
<u>2ème cas :</u> (u_n) ne converge pas (plus difficile).
On cherche une suite u_n telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ et qui ne converge pas. posons :
Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{2^{2k}+i} = \tfrac{i}{2^{2k}} \text{ pour tout } i \in [\![0, 2^{2k} - 1]\!]$$
$$u_{2^{2k+1}+i} = 1 - \tfrac{i}{2^{2k+1}} \text{ pour tout i} \in [\![0, 2^{2k+1} - 1]\!]$$

Nous remarquons que la suite est bien définie, si $n \in \mathbb{N}$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $n \in [\![2^j, 2^{j+1} - 1]\!]$. n peut donc s'écrire sous la forme $2^j + i$ avec $i \in [\![0, 2^j - 1]\!]$. il suffit ensuite de considérer la parité de j. On a :

$$(u_n)_{n \geq 1} := (0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{7}{8}, \frac{6}{8}, \frac{5}{8}, \frac{4}{8}, \frac{3}{8}, \frac{2}{8}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots)$$

Par définition même de u_n, $u_{n+1} - u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. (à vérifier, me demander en cas de problème.). (u_n) possède deux sous-suites n'ayant pas la même limite : en effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2^{2k}} = 0$ et $u_{2^{2k+1}} = 1$.