Alexandre Marino
Lycée Joffre

Suites extraites / Valeurs d'adhérence

Exercice 1 : Soit (u_n) une suite réelle.

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{k \in \mathbb{N} |\ u_k \in A_n\}$ est infini. Montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(n)} \in A_n$.
2. Montrer que si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) possède une suite extraite de limite $+\infty$.

Exercice 2 : Théorème de Bolzano-Weierstrass : montrer que toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence.

Exercice 3 : La complétude de $\mathbb{R}$: montrer que toute suite réelle de Cauchy converge dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soit (u_n) une suite de réels bornée. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 5 : Soit (u_n) une suite réelle.

1. Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?
2. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.

Exercice 6 : Soit (u_n) une suite réelle.

1. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.
2. Est-ce que l'équivalence suivante est vraie : (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}), (u_{2n+1}) convergent.
3. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.

Exercice 7 : Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 8 : Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 9 : Soit u une suite réelle bornée.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée, nous notons $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \inf_{p\geq n} u_p \quad , \quad y_n = \sup_{p\geq n} u_p$$

1. Montrer que (x_n), (y_n) convergent dans $\mathbb{R}$.
   Nous noterons $\liminf u_n - = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).
2. Montrer que $\liminf u_n \leq \limsup u_n$ et $\liminf u_n \in V(u)$.
   Nous admettrons qu'à l'aide d'une preuve comparable nous obtenons $\limsup u_n \in V(u)$.
3. Montrer que $V(u) \subset [\liminf u_n, \limsup u_n]$.
4. Montrer que si de plus $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $V(u) = [\liminf u_n, \limsup u_n]$.
5. Application : Soient $I = [a, b]$ et f une fonction continue sur I telle que I stable par f. Nous considérons (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors (u_n) converge dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 : Soit (E, $\| \cdot \|$) un espace vectoriel normé. Pour toute suite u à valeurs dans E nous notons $V(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de u et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n(u) = \{u_k \mid k \geq n\}$.
Nous notons pour toute partie A de E, $diam(A)$ le diamètre de A défini par

$$diam(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} \|x - y\|$$

1. Montrer qu'une suite u est de Cauchy si et seulement si $diam(A_n(u)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que $V(u) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n(u)}$.
3. Montrer que $V(u)$ est un fermé de E.