Alexandre Marino
Lycée Joffre

Approximation, irrationalité, ...

EXERCICE 1: Etude préliminaire

Nous notons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer que f est 1-périodique et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) < 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(nx) = 0$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}$, $f(px) = f(pf(x))$.

> Les parties 2 et 3 utiliseront cette fonction f.
> De nombreuses questions ont déjà été traitées en cours ou en TD. (Ex : partie 2 questions 1 et 2)

EXERCICE 2: Approximation rationnelle : irrationalité, nombres algébriques et transcendants

1. Soit $x \in \mathbb{R}$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}$.
   (b) En notant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \lfloor nx \rfloor$ et $q_n = n$, montrer que la suite $(\dfrac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x et que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n}$$
   Nous proposons dans la suite de cet exercice de démontrer le résultat suivant :
   Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(\dfrac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq q_n \leq n \quad et \quad |x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^2}$$
   et
   $$\frac{p_n}{q_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$
2. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons dans la suite $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = f(kx)$.
   (a) Montrer qu'il existe $i, j \in [\![0, n]\!], i \neq j$ tels que $|a_i - a_j| < \dfrac{1}{n}$.
   (b) En déduire qu'il existe $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in [\![1, n]\!]$ tels que $|q_n x - p_n| < \dfrac{1}{n}$.
   (c) Conclure en démontrant que si $x > 0$ alors il existe une suite de rationnels $(\dfrac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq q_n \leq n \quad et \quad |x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^2} \quad et \quad \frac{p_n}{q_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$$

> Que doit-on (peut-on) retenir de ces deux première questions :
> Une notion de vitesse de convergence semble nécessaire.
> Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, nous dirons que x est $\mathbb{Q}$-approchable à l'ordre r lorsqu'il existe une constante C (qui dépend de x) et une suite de rationnels $(\dfrac{p_n}{q_n})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x - \dfrac{p_n}{q_n}| \leq \dfrac{C}{q_n^r}$
> et x est strictement $\mathbb{Q}$-approchable à l'ordre r lorsqu'il existe une constante C et une suite de rationnels $(\dfrac{p_n}{q_n})$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p_n}{q_n} \neq x$, $|x - \dfrac{p_n}{q_n}| \leq \dfrac{C}{q_n^r}$
> Comment "mesurer" cette convergence : nous nous intéresserons au cas où il existe $d > 1$ et une constante $K > 0$ telles que $\forall p \in \mathbb{Z}^*, \forall q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p}{q} \neq x$, $|x - \dfrac{p}{q}| \geq \dfrac{K}{q^d}$

3. Un pas vers l'irrationalité : on considère, si nécessaire, dans le suite que $x > 0$
   (a) Soit $x \in \mathbb{Q}$ montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{Z}^*, \forall q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p}{q} \neq x$, $|x - \dfrac{p}{q}| \geq \dfrac{C}{q}$.

(b) Obtenir le critère d'irrationalité suivant : soient $x \in \mathbb{R}$ et une suite de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_n}{q_n} \neq x$ et $p_n - q_n x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, montrer que $x \notin \mathbb{Q}$.

> Quelle est la philosophie du résultat précédent ?
> Un rationnel est très mal approché. Ce qui peut se traduire pas "la vitesse de convergence de la suite associée est très lente" :
> Si x est strictement $\mathbb{Q}$-approchable à l'ordre $1+\varepsilon$ alors x est irrationnel.
> APERY (1978) a ainsi montré que $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est un nombre irrationnel à l'aide de l'inégalité $\frac{p_n}{q_n} \neq x$, $|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^{1.08}}$ où la construction de la suite est liée aux fractions continues.

(c) Premier nombre de Liouville : on note $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k^2}}$.

i. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Nous noterons α sa limite $\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}}$.

Nous noterons $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = 2^{n^2}$.

ii. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p > n$,

$$0 \leq u_p - u_n \leq \sum_{k=(n+1)^2}^{p^2} \frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{2^{(n+1)^2}}$$

iii. En déduire que $q_n(u_n - \alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en déduire que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

> En résumé, tout réel x est $\mathbb{Q}$-approchable à l'ordre 2.
> Tout réel strictement $\mathbb{Q}$-approchable à un ordre strictement supérieur à 1 est irrationnel.
> Pour les irrationnels, les notions de "strictement approchable" et " d'approchable" coïncidant nous dirons simplement "approchable" dans la suite du document.
> Nous obtenons donc que tout irrationnel est approchable à l'ordre 2.
> Deux questions se posent :
> 1-Peut-on mesurer précisément la vitesse de convergence ?
> 2-Que dire d'un réel approchable a tout ordre ?

4. Nous proposons de démontrer le théorème de Liouville (1844)

> **Théorème :** Soit α un nombre réel racine d'un polynôme de degré d à coefficients entiers.
> Il existe une constante strictement positive $c > 0$ telle que
> $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\frac{p}{q} \neq \alpha$, $\qquad |\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^d}$.

> **Vocabulaire :** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$
> - On dit que α est algébrique lorsque α est racine d'un polynôme à coefficients entiers.
> - On dit que α est transcendant lorsque α n'est pas algébrique.

Dans la suite, nous noterons P le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $\forall k \in [\![0, d]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$ et $a_d \neq 0$ tel que $P(\alpha) = 0$. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $|\alpha - \frac{p}{q}| \leq 1$.

Nous notons $\gamma = P(\frac{p}{q})$ et nous supposons sans perte de généralité que $\gamma \neq 0$.

(a) Montrer que $|\gamma| \geq \frac{1}{q^d}$.

(b) i. Montrer que pour tout x entre $\frac{p}{q}$ et α,

$$|P'(x)| \leq \left(\sum_{k=0}^{d} k|a_k|\right) K^d$$

où $K = |\alpha| + 1$.

Nous noterons $M = \left(\sum_{k=0}^{d} k|a_k|\right) K^d$ dans la suite.

ii. En déduire que $|\gamma| \leq M|\alpha - \frac{p}{q}|$.

(c) Conclure.

Le résultat de Liouville énonce en particulier qu'on ne peut pas approcher "trop rapidement " un nombre algébrique. Comment mesurer l'irrationalité ?
Un nombre algébrique (irrationnel) de degré d est approchable à l'ordre 2 et ne peut pas être approchable à un ordre supérieur à d.
Un peu de Culture : ROTH (1955) : Aucun algébrique n'est approchable à un ordre strictement supérieur à 2.

5. Un transcendant de Liouville :
On dit qu'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est de Liouville lorsqu'il existe $C > 0$ et une suite de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geq 2$, $\frac{p_n}{q_n} \neq x$ et

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{C}{q_n^n}$$

(a) Montrer qu'un nombre de Liouville est un nombre Transcendant.

(b) Question longue :
Montrer que la limite de la suite $(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n!}})_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\beta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n!}}$, est un nombre transcendant.